3.6 Homojen Olmayan Denklemler; Belirsiz katsayılar Yöntemi

I açık aralığında, p, q, g fonksiyonları sürekli olmak üzere

$$L(y) = y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \qquad (3.12)$$

homojen olmayan dif. denklemini inceleyelim. (3.12) denklemin de $g(t)=0$ düşünüp elde ettiğimiz

$$L(y) = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \qquad (3.13)$$

denklemine (3.12)'nin homojen kısmı (denklemi) denir. Homojen olmayan dif. denklemlerin çözümleri için gerekli olan aşağıdaki iki teoreme bakalım.

Teorem: Y_1 ve Y_2, (3.12) homojen olmayan dif. denklemin iki çözümü ise $Y_1 - Y_2$ farkı homojen kısım (3.13)'ün bir çözümüdür. Eğer y_1 ve y_2 homojen kısmın temel çözümleri ise c_1 ve c_2 belirli sabitler olmak üzere

$$Y_1 - Y_2 = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

dir.

Kanıt: Y_1 homojen olmayan dif. denklemin çözümü ise

$$L(Y_1)(t) = g(t)$$

aynı şekilde Y_2'de çözüm olduğundan

$$L(Y_2)(t) = g(t)$$

dir.

$$L(Y_1) - L(Y_2) = g(t) - g(t) = 0$$

dır. Diğer taraftan

$$L(Y_1 - Y_2) = L(Y_1) - L(Y_2)$$

dir. Buna göre

$$L(Y_1 - Y_2) = 0$$

dır. Yani $Y_1 - Y_2$ homojen kısmın çözümüdür. y_1 ve y_2 homojen kısmın temel çözümleri ise her çözüm $c_1 y_1 + c_2 y_2$'nin içindedir. Uygun c_1 ve c_2 sabitleri için

$$Y_1 - Y_2 = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

dir.

Teorem: c_1, c_2 keyfi sabitler, y_1 ve y_2

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \qquad (3.12)$$

homojen olmayan dif. denklemin homojen kısmın temel çözümleri ve Y, (3.12)'nin bir özel çözümü ise homojen olmayan (3.12) dif. denkleminin genel çözümü

$$y = \phi(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + Y(t)$$

şeklinde yazılabilir.

Kanıt: Yukarıdaki teoremde $Y_1(t)$ yerine homojen olmayan dif. denklemin keyfi $\phi(t)$ çözümünü ve Y_2'yerine herhangi bir özel çözümü $Y(t)$'yi yazarsak kanıt tamamlanır. Yani

$$\phi = \phi(t) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + Y$$

dir.

Buna göre homojen olmayan dif. denklemlerin çözümü için

1) homojen kısmın genel çözümü bulunacak (bunu y_h ile göstereceğiz)
2) homojen olmayan dif. denklemin bir özel çözümü bulunacak
3) bu iki çözüm teoremde belirtildiği birleştirilecek.

Homojen kısmın çözümü en azından sabit katsayılı dif. denklemler için gördük. (3.12) homojen olmayan dif. denklemin bir özel çözümünü bulmak için iki yöntem kullanılacaktır. Bunlardan biri belirsiz katsayılar yöntemi diğeri sabitlerin değişimi yöntemidir. Bu iki yöntemin birbirlerine göre avantajları ve dezavantajları vardır.

Belirsiz katsayılar Yöntemi

Bu yöntemi genellikle sabit katsayılı homojen denklem ile homojen olmayan kısmın eksponansiyel, polinom, sinus, cosinus veya bunların toplam ve çarpımlarından oluşan durumlarda kullanıyoruz.

Örnek 1) $y''-2y'-3y=4e^{2t}$ homojen olmayan dif. denklemin bir özel çözümünü bulunuz.

$Y(t)$ özel çözümünü $Y''(t)-2Y'(t)-3Y(t)=4e^{2t}$ olacak şekilde arıyoruz. Eksponansiyel fonksiyonun türevleri kendisine eşit olduğundan çözüm e^{2t} nin katı şeklinde olmalıdır. Yani çözümü $Y(t)=Ae^{2t}$ şeklinde aramalıyız.

$$Y=Ae^{2t}$$
$$Y'=2Ae^{2t}$$
$$Y''=4Ae^{2t}$$

olur. Denklemde yerine yazılırsa

$$4Ae^{2t}-4Ae^{2t}-3Ae^{2t}=4e^{2t}$$
$$-3A=4 \Rightarrow A=-\frac{4}{3}$$

olur. Yani bir özel çözüm

$$Y(t)=-\frac{4}{3}e^{2t}$$

dir.

2) $y''-2y'-3y=3\sin t$ dif. denklemin bir özel çözümünü bulunuz.

Bir önceki örneğe dayanarak çözümü $Y(t)=A\sin t$ şeklinde arayalım.

$$Y=A\sin t$$
$$Y'=A\cos t$$
$$Y''=-A\sin t$$

denklemde yerine yazılırsa

$$-A\sin t-2A\cos t-3A\sin t=3\sin t$$

olmalı. $-4A=3$, $2A=0$ $\Longrightarrow$ ikisi aynı anda sağlanmaz

$A=-\frac{3}{4}$, $A=0$

Bu durumda çözümü

$$Y(t)=A\sin t+B\cos t$$

şeklinde aramalıyız.

$$Y'=A\cos t-B\sin t$$
$$Y''=-A\sin t-B\cos t$$

denklemde yerine yazılırsa

$$-A\sin t-B\cos t-2A\cos t+2B\sin t-3A\sin t-3B\cos t=3\sin t$$

$$\begin{aligned}-4A+2B&=3\\ -2A-4B&=0\end{aligned} \Rightarrow A=-\frac{3}{5} \quad B=\frac{3}{10}$$

Sonuçta çözüm

$$Y(t)=-\frac{3}{5}\sin t+\frac{3}{10}\cos t$$

olarak bulunur.

3) $y''-2y'-3y=-3e^{t}\cos 2t$ dif. denkleminin bir özel çözümünü bul.

Çözüm $Y(t)=A\cos 2t\, e^{t}+B\sin 2t\, e^{t}$ şeklinde aranır.

$$Y=Ae^{t}\cos 2t+Be^{t}\sin 2t$$
$$Y'=A[e^{t}(\cos 2t-2\sin 2t)]+B[e^{t}(\sin 2t+2\cos 2t)]$$
$$Y''=A[e^{t}(-3\cos 2t-4\sin 2t)]+B[(-3\sin 2t+4\cos 2t)e^{t}]$$

denklemde yerine yazılırsa

$$A[e^{t}(-3\cos 2t-4\sin 2t)]+B[e^{t}(-3\sin 2t+4\cos 2t)]-2A[e^{t}(\cos 2t-2\sin 2t)]$$
$$-2B[e^{t}(\sin 2t+2\cos 2t)]-3Ae^{t}\cos 2t-3Be^{t}\sin t=-3e^{t}\cos 2t$$

$$\begin{aligned}-8A&=-3\\ -8B&=0\end{aligned} \Rightarrow A=\frac{3}{8} \quad B=0$$

bulunur. Çözüm

$$Y(t)=\frac{3}{8}e^{t}\cos 2t$$

4) $y''-2y'-3y = t^2-2$ dif. denkleminin bir özel çöz. bul.

Çözüm $Y(t)=At^2+Bt+C$

aranır.

$$Y'=2At+B$$

$$Y''=2A$$

denklemde yerine yazılırsa

$$2A-2(2At+B)-3(At^2+Bt+C)=t^2-2$$

$$\begin{aligned} -3A&=1 \\ -4A-3B&=0 \\ 2A-2B-3C&=-2 \end{aligned} \Rightarrow A=-\frac{1}{3} \quad B=\frac{4}{9} \quad C=\frac{4}{27}$$

bulunur. Çözüm

$$Y(t)=-\frac{1}{3}t^2+\frac{4}{9}t+\frac{4}{27}$$

dir.

$$y''+p(t)y'+q(t)y=g(t) \qquad (3.14)$$

dif. denkleminde $g(t)=g_1(t)+g_2(t)$ ise

$$y''+p(t)y'+q(t)y=g_1(t)$$

bir çözümü Y_1,

$$y''+p(t)y'+q(t)y=g_2(t)$$

bir çözümü Y_2 ise (3.14)'ün bir çözümü Y_1+Y_2 dir.

Bu işlem sonlu toplamlar içinde doğrudur.

5) $y''-2y'-3y=4e^{2t}-3e^{t}\cos 2t+t^2-2+3\sin t$ dif. denklemin bir özel çöz. bul.

$$Y(t)=-\frac{4}{3}e^{2t}-\frac{3}{5}\sin t+\frac{3}{10}\cos t+\frac{3}{8}e^{t}\cos 2t-\frac{1}{3}t^2+\frac{4}{9}t+\frac{4}{27}$$

dir.

6) $y''+4y=3\cos 2t$ dif. denkleminin bir özel çöz. bul.

Çözümü $Y(t)=A\cos 2t+B\sin 2t$

şeklinde arayalım.

$$Y'(t)=-2A\sin 2t+2B\cos 2t$$

$$Y''(t)=-4A\cos 2t-4B\sin 2t$$

denklemde yerine yazılırsa

$$y''-4y=-4A\cos 2t-4B\sin 2t+4A\cos 2t+4B\sin 2t=0$$

Homojen kısmın çözümüne bakalım.

$$r^2+4=0 \quad r_1=2i,\ r_2=-2i \qquad y_h=c_1\cos 2t+c_2\sin 2t$$

Aradığımız çözüm homojen kısmın çözümü olduğundan sonucun sıfır çıkması doğaldır. Bu durumda çözümü t ile çarparak arıyoruz. Yani çözümü $Y(t)=At\cos 2t+Bt\sin 2t$ şeklinde aramalıyız.

$$Y=At\cos 2t+Bt\sin 2t$$

$$Y'=A(\cos 2t-2t\sin 2t)+B(\sin 2t+2t\cos 2t)$$

$$Y''=A(-4\sin 2t-4t\cos 2t)+B(4\cos 2t-4t\sin 2t)$$

$$A(-4\sin 2t-4t\cos 2t)+B(4\cos 2t-4t\sin 2t)+4At\cos 2t+4Bt\sin 2t$$
$$=3\cos 2t$$

$$\Rightarrow -4A\sin 2t+4B\cos 2t=3\cos 2t$$

$$A=0,\ B=\frac{3}{4}$$

özel çözüm $Y(t)=\frac{3}{4}t\sin 2t$

dir.